50. 單一連結 *Lie* 群の空間について

松島 與三 (名大)

E. *Cartan* は單一連結 *Lie* 群の位相空間としての構造について次の定理を得てゐる。

定理.（Cartan）単一連結 Lie 群の空間は，euclid 空間といくつかの compact な単純 Lie 群の空間の直積に homeomorph である。

（例へば，E. Cartan, Selecta P. 245 又は La topologie des groupes de Lie）

この定理の Cartan 自身による証明は，彼の symmetric Riemann space の理論をつかつてゐるので（主として小生などにとつては）理解し難い所が多い。ところが Gantmacher が（On the classification of real simple Lie groups, Recueil Math, 47, 1939）で real な単純群の分類につかつてゐる論法により，symmetric space をつかはずにすませることが出来る様である。Gantmacher 自身も，このことについて，少し注意してゐるが 完全にはやつてゐない様であるから，以下一応 書いてみることにしたい。

Cartan に書いてある様に，上の定理は，次の定理からすぐ出る．（Cartan l.c.）

定理 simple Lie group $\mathfrak{G}$ の adjoint group $\mathfrak{A}$ の空間は compact linear group の空間と euclid 空間の直積に homeomorph である．

まづ次の Lemma をのべる。

Lemma. Φ を skew symmetric な real matrix, $A = \exp i\Phi$ とするとき，$\Phi = -i \log A$ となる。

証明．Φ は適当な行列 T で変換すれば，

$$T\Phi T^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \Phi_t & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \Phi_k = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_k \\ \varphi_k & \end{pmatrix}$$

そのとき $TAT^{-1} = \exp i T\Phi T^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_t & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

こゝに $A_k = \begin{pmatrix} a_k & -ib_k \\ ib_k & a_k \end{pmatrix}$ $\quad a_k = \dfrac{e^{\varphi_k} + e^{-\varphi_k}}{2}$,

$b_k = \dfrac{e^{\varphi_k} - e^{-\varphi_k}}{2}$ となる。

このとき．$\log TAT^{-1} = iT\Phi T^{-1}$ となることは．直接容易にたしかめることが出来る。

しからば．$\log A$ は 収斂し．$T^{-1}(\log TAT^{-1})T = i\Phi$ となることは 明かである。　以上

定理の証明 1.　$\mathfrak{G}$ が complex simple Lie group の場合.

$\mathfrak{G}$ の Lie algebra を $\mathfrak{L}$，$\mathfrak{L}$ の compact real form を $\mathfrak{L}_0$ とする。$\mathfrak{G}$ の adjoint group $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{L}$ の automorphism の群の 1 をふくむ連結成分である．$\mathfrak{L}_0$ のそれを $\mathfrak{A}_0$ とする。そのとき $A \in \mathfrak{A}$ は　$A = R \exp i\Psi$ と表される。こゝに．$R \in \mathfrak{A}_0$，Ψ は $\mathfrak{L}_0$ の derivation である。
（Gantmacher l.c §4）　今 A, R, Ψ 等を $\mathfrak{L}_0$ の定まった基 $\{e_1 \cdots\cdots e_l\}$ をとって．行列により表現したとしやう。
（$\{e_1 \cdots e_r\}$ は $\mathfrak{L}_0$ の基本二次型式が，$t = \sum_k \tau^k e_k$ とするとき，$\varphi(t) = -\sum(\tau^k)^2$ となる様とつておくとする。）
そのとき．$\varphi(t)$ は．adj. gr. の不変式であるから R は real orthogonal，Ψ は real skew symmetric である．
まづ．A の表示に於て R，Ψ は A により．一意的に定ることを注意しやう。たとへば $R \exp i\Psi = R_1 \exp i\Psi_1$ となつたとすれば．$R_1^{-1}R = \exp i\Psi_1 \cdot \exp(-i\Psi)$ conjugate complex をとれば R．Ψ 等は real であるから．
$\exp(-i\Psi_1)\ \exp i\Psi = \exp i\Psi_1\ \exp(-i\Psi)$ 従って
$\exp i2\Psi = \exp i2\Psi_1$，故に Lemma から．
$\Psi = \Psi_1$，$R = R_1$ を得る。

今 $A_n \in \mathfrak{A}$ とし．$A_n \to A \in \mathfrak{A}$ とする．$A_n = R_n \exp i\Psi_n$，
$A = R \exp i\Psi$ としやう

$\mathfrak{A}_0$ は compact であるから $\{R_n\}$ は集積点をもつ。簡単のため $R_n \to \tilde{R}$ としやう。そのとき

$R_n^{-1}A_n = \exp_i \Psi_n \to S \exp_i \Psi = P, \quad S = \tilde{R}^{-1}R.$

しかるに、$\overline{\exp_i \Psi_n} = (\exp_i \Psi_n)' = (\exp_i \Psi_n)^{-1}$ であるから、$\bar{P} = R' = P^{-1}$、すなはち P は hermitian 且 orthogonal である。従って P は $P = S \exp_i \Phi_1$，$S_1\Phi_1 = \Phi_1 S_1$，$S = S_1' = S_1^{-1}$，$\Phi_1' = -\Phi_1$，と表される。(Gantmacher l.c. th. 4) 故に上と同じ論法で、$S = S_1$，$\Psi = \Phi_1$ となり S と $\exp_i \Psi$ は可換になる。$S \neq E$ とすれば S は -1 なる固有値をもち、$S \exp_i \Psi$ の固有値に負のものがあるが、$\exp_i \Psi_n$ の固有値はすべて正でしかも $\exp_i \Psi_n \to S \exp_i \Psi$ であるから不可。故に $S = E$，$R = \tilde{R}$ すなはち、

$R_n \to R$，$\exp_i \Psi_n \to \exp_i \Psi$，従って Log をとれば、$\Psi_n \to \Psi$　故に $\mathfrak{A} \ni A = R \exp_i \Psi \rightleftarrows (R, \Psi)$ なる対応により、$\mathfrak{A}_0$（それは compact simple）と euclid 空間の直積に homeomorph である。

2　$\mathfrak{G}$ が real simple Lie group の場合

real simple なものは、complex simple なもので、complex parameter の実部と虚部を real parameter とみたものか、どちらかである。前者の場合は、1 の場合になるから後の場合を考へやう。

$\mathfrak{G}$ の Lie algebra を $\mathfrak{L}_1$，その係数を複素数にまで拡大したものを $\mathfrak{L}$，$\mathfrak{L}$ の compact real form を $\mathfrak{L}_0$ とする。そのとき $\mathfrak{L}_1$ は Cartan の定理により（例へば Gantmacher, l.c.）次の様な real Lie algebra と同型である。まず $\mathfrak{L}_0$ のある involutive automorphism S ($S^2 = E$) をとる。S は symmetric orthogonal であるから、固有値は ± 1，$+1$ に対する固有 Vector を $e_1 \cdots\cdots e_s$，-1 に対する固有 Vector を $e_{s+1} \cdots\cdots e_r$ とする（$e_i \in \mathfrak{L}_0$ にとれる）$\mathfrak{L}_1 \cong \tilde{\mathfrak{L}}_1 = Pe_1 + \cdots$

($e_i \in \mathfrak{L}_0$ にとれる) $\mathfrak{L}_1 \cong \mathfrak{X}_1 = Pe_1 + \cdots\cdots + Pe_s + P_i e_{s+1} + \cdots$
$\cdots + P i e_r$, 但し P は実数体, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{X}_1$ と考へてよい。$\mathfrak{L}_1$ の
autom の群の 1 をふくむ連結成分を $\mathfrak{A}_1$ とする。それが $\mathfrak{g}$ の
adjoint group である。$(e_1 \cdots\cdots e_s, ie_{s+1}, \cdots, ie_r) =$
$(e_1' \cdots\cdots e_r')$ とおき, $(e') = (e)T$, 但し $T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & i \end{pmatrix}$ とする。

$$T^2 = S, \quad \overline{T} = T^{-1}, \quad TS = ST = T^{-1}$$

$\alpha \in \mathfrak{A}_1$ とし, α を (e') なる $\mathfrak{L}$ の *basis* で行列に表したものを A', (e) なる *basis* での それを A とすれば, $A = TA'T^{-1}$ であり, A' は *real* である。A の *conjugate complex* の行列を $\overline{A}$ とすれば, $\{e_1 \cdots\cdots e_r\}$ が *real* な $\mathfrak{L}_0$ の *basis* であることから, $\overline{A}$ は $\mathfrak{L}_1$ の 1 つの *autom* を表してゐることが容易にわかる。しかるに上の関係から,

$$\overline{A} = T^{-1}A'T = STA'T^{-1}S^{-1} = SAS^{-1},$$

$A = R\ \exp i\Psi$ とすれば, $\overline{A} = R\ \exp(-i\Psi) = SR \cdot \exp i\Psi S^{-1}$
$= SRS^{-1} \cdot \exp(iS\Psi S^{-1})$ 　従って

$$SR = RS, \quad S\Psi S^{-1} = -\Psi,$$

逆に R, Ψ が, この性質をもてば, $A = Re^{i\Psi} \in \mathfrak{A}_1$,
これを, 言ふには $A' = T^{-1}AT$ が *real* であることが言へればよい。 R が S と可換であれば, $T = \frac{1-i}{2}S + \frac{1+i}{2}E$ と表されるから, R と S も可換であり

$$A' = T^{-1}R\ \exp i\Psi T = RT^{-1}\exp i\Psi T$$
$$\overline{A'} = R \cdot T\ \exp(-i\Psi)T^{-1}$$

しかるに, $S(\exp i\Psi)S^{-1} = \exp(-i\Psi)$ だから, 左から T, 右から T^{-1} をかければ

$T^{-1}(\exp i\Psi)T = T(\exp i\Psi)T^{-1}$ であるから, $A' = \overline{A'}$ である。
故に, $A \in \mathfrak{A}_1$ と S と可換な $\mathfrak{L}_0$ の *autom*. R, $S\Psi S^{-1} = -\Psi$ なる $\mathfrak{L}_0$ の *derivation* Ψ が 1 対 1 に対応する。しかるに S と可換な *autom* の全体は明かに, *compact linear group* であり $S\Psi S^{-1} = -\Psi$ なる Ψ は *linear space* をつくるから $A \rightleftarrows (R, \Psi)$

により、$\mathfrak{O}_1$ は *compact linear group* の空間と、*euclid* 空間の直積と *homeomorph* である。 1947.5.6